

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA NAȚIONALĂ 22- 24 mai 2009**

**Filiera tehnologică: profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului**

**CLASA a XI-a**

**I.** La o oră de matematică profesorul alege o matrice  $A \in M_3(\mathbb{R})$  astfel încât  $A^2 = I_3$ . Trei elevi aleg fiecare câte o matrice  $X, Y$ , respectiv  $Z \in M_3(\mathbb{R})$  astfel încât :

(\*)  $X = Y + Z$ ;  $AY = Y$ ;  $AZ = -Z$ .

- a) Arătați că  $Y = \frac{1}{2} \cdot (X + AX)$  și  $Z = \frac{1}{2} \cdot (X - AX)$  verifică sistemul de condiții (\*).
- b) Demonstrați că matricele  $Y$  și  $Z$  astfel alese sunt unice (cu  $A$  și  $X$  fixate).

**II.** Fie matricele  $A, B \in M_3(\mathbb{R})$  astfel încât  $A \cdot B = 2A + 3B$ . Demonstrați că:

- a) Matricea  $A - 3I_3$  este inversabilă, iar inversa ei este matricea  $\frac{1}{6}(B - 2I_3)$ .
- b)  $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ .

**III.** Fie numărul real  $a > 0$  și funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - ax$ .

- a) Determinați asimptota oblică la graficul funcției  $f$  către  $-\infty$ .
- b) Aflați punctele de extrem local ale funcției  $f$ .
- c) Determinați  $a \in (0, \infty)$  știind că  $f(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$  și apoi verificați inegalitatea obținută.

**IV.** Determinați numerele naturale  $a, b, c$  astfel încât triunghiul determinat de punctele  $A(a, b)$ ,  $B(b, c)$  și  $C(c, a)$  să aibă aria egală cu  $\frac{3}{2}$ , iar centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  să fie punctul  $G(2, 2)$ .

**Nota:** Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.